Bài tập số phức

Câu 1: Giải phương trình sau trên tập số phức C: $z^3 - (1-i)^{15} = 0$

Câu 2: Giải phương trình phức sau: $z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$ và tính giá trị của biểu thức

$$A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + z_1 z_2$$

Câu 3: Giải phương trình phức: $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$

Câu 4: Giải phương trình phức sau: $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)z^3 = 4i$

Câu 5: Giải phương trình phức sau: $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^{10}}{z^6} = (1-i)^{15}$

Câu 6: Giải phương trình phức sau: $\dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = -4$

Câu 7: Cho z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của pt $z^2 + (3-2i)z + 6 + 5i = 0$. Tính $|z_1 - z_2|$.

Câu 8: Giải pt phức sau: $1 + (z+2i) + (z+2i)^2 + (z+2i)^3 + (z+2i)^4 = 0$

Câu 9: Cho $f(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0 \; với \; z \in C$

a) Tính giá trị của $f(z)$ tại $z = \pm i$ b) Giải phương trình $f(z) = 0$ trên tập số phức.

Câu 10: Cho $f(z) = z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i$

a) Tính $f(i)$. b) Giải phương trình $f(z) = 0$ trên tập số phức.

Câu 12: Giải phương trình phức sau: $z^{10} + z^5 + 1 = 0$

Câu 13: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình sau:

$$z^4 - \left(\sqrt{3}+1\right)z^3 + \left(\sqrt{3}+2\right)z^2 - \left(\sqrt{3}+1\right)z + 1 = 0$$

Tính $|z_4|^4 + |z_3|^3 + |z_2|^2 + |z_1|$

Câu 14: Giải phương trình phức sau: $(z+i)^5 = (z-i)^5$

Câu 15: Giải phương trình phức: $\bar{z}^2 + 2iz - 1 = 0$

Câu 16: Giải phương trình phức $4z^4 - 24z^3 + 57z^2 + 18z - 45 = 0$. Biết $z = 3 + i\sqrt{6}$ là 1 nghiệm của phương trình trên.

Câu 17: Giải phương trình phức: $z^{10} + z^8 + z^2 + 1 = 0$

Câu 18: Giải phương trình phức: $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^4 = 1$ với $x \in R$, i là đơn vị ảo.

Câu 19: Tính $|{z_1}^2 - {z_2}^2|$ với z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của $iz^2 - (3-i)z + 2 = 0$

Câu 20: Cho z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của $iz^2 + (2+i)z - 7 = 0$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right|$

Câu 21: Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $(1+i)^{22}(2z-1) = \left(\sqrt{3} - i\right)^{10}$

Câu 22: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = \frac{(2 - i\sqrt{12})^{50}}{(2+2i)^{30}}$

Câu 23: Tìm phần ảo và phần thực của số phức $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{97}$

Câu 24: Cho $z_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ với $n \in N$. Tìm n nhỏ nhất để: $Re(z_n) = 0$.

Câu 25: Tính modun và argument của số phức $z = \left(\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{1 + i\sqrt{3}}\right)^3$

Câu 26: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1+i)^{10}\left(-\sqrt{3} + i\right)^{15}$

Câu 27: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $z = \frac{(1+i)^6(-1+i\sqrt{3})^n}{(1-i)^{10}}$ là 1 số thực.

Câu 28: Cho số phức $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Tính $A = z^{1998} + \bar{z}^{1998}$, $\bar{z}$ là số phức liên hợp

Câu 29: Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n} = -1; \sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0, n \geq 2$

Câu 30: Cho $a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; k, n \in N$. Tính $S = {a_0}^m + {a_1}^m + \cdots + {a_{n-1}}^m$, $m \in R$

Câu 31: Chứng minh rằng $S = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + ... + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{-1}{2}$

Câu 32: Cho $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của 1. Tính $A = \sum_{i=1}^{2014} \varepsilon_i^3$

LỜI GIẢI BÀI TẬP SỐ PHỨC

Câu 1: Giải phương trình sau trên tập số phức $C: z^3 - (1-i)^{15} = 0$

Giải:

$$z^3 - (1-i)^{15} = 0 \Leftrightarrow z^3 = (1-i)^{15} \Leftrightarrow z^3 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{15}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 2^{15/2}\left(\cos\frac{-15\pi}{4} + i\sin\frac{-15\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2^{15/2}\left(\cos\frac{-15\pi}{4} + i\sin\frac{-15\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{-15\pi}{4} + k2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{-15\pi}{4} + k2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right] \quad (k = \overline{0;2})$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}\right)\right] \middle| k = \overline{0;2}\right\}$$

Câu 2: Giải phương trình phức sau: $z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$ và tính giá trị của biểu thức

$$A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + z_1 z_2$$

Giải:

$z^2 + (3-2i)z - 6i = 0$ có $\Delta = (3-2i)^2 - 4.(-6i) = 5 + 12i = (3+2i)^2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{-3+2i+3+2i}{2} = 2i\ ;\quad z_2 = \frac{-3+2i-3-2i}{2} = -3$$

$$\Rightarrow A = {z_1}^2 + {z_2}^2 + z_1 z_2 = (2i)^2 + 9 + 2i.(-3) = 5 - 6i$$

Câu 3: Giải phương trình phức: $z^4 - (1+i)z^2 + i = 0$

Giải:

Đặt $z^2 = t$. Phương trình ban đầu trở thành $t^2 - (1+i)t + i = 0$

$$\Delta = (i+1)^2 - 4i = i^2 - 2i + 1 = (i-1)^2$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{1+i+\sqrt{(i-1)^2}}{2} = \frac{1+i+i-1}{2} = i\ ;\ t_2 = \frac{1+i-\sqrt{(i-1)^2}}{2} = \frac{1+i-i+1}{2} = 1$$

$$t_1 = i \Rightarrow z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{2} + \sin\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{2}\ (k = \overline{0,1})$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{\pm 1;\ \cos\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{2} + \sin\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{2}\ \middle|\ k = \overline{0,1}\right\}$$

Câu 4: Giải phương trình phức sau: $\left(2+2\sqrt{3}i\right)z^3 = 4i$

Giải:

$$\left(2+2\sqrt{3}i\right)z^3 = 4i \Leftrightarrow z^3 = \frac{4i}{2+2\sqrt{3}i} = \frac{4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3} + \sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3}\ , k = \overline{0,2}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{\cos\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3} + \sin\frac{\frac{\pi}{6}+k2\pi}{3}\ \middle|\ k = \overline{0,2}\right\}$$

Câu 5: Giải phương trình phức sau:

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}{z^6} = (1-i)^{15}$$

Giải:

Điều kiện: $z \neq 0$

$$\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}{z^6} = (1-i)^{15} \Leftrightarrow z^6 = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{10}}{(1-i)^{15}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{10}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{15}}$$

$$\Leftrightarrow z^6 = \frac{2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)}{2^{15/2}\left(\cos\frac{-15\pi}{4} + i\sin\frac{-15\pi}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^6 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{85\pi}{12} + i\sin\frac{85\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2^{\frac{5}{12}}\left(\cos\frac{\frac{85\pi}{12}+k2\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{85\pi}{12}+k2\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2^{5/12}\left[\cos\left(\frac{85\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{85\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)\right]\ \left(k=\overline{0;5}\right)$$

Các nghiệm đều $\neq 0$

Tập nghiệm của phương trình là:

$$S = \left\{2^{5/12}\left[\cos\left(\frac{85\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{85\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)\right]\middle| k=\overline{0;5}\right\}$$

Câu 6: Giải phương trình phức sau:

$$\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = -4$$

Giải:

ĐK: $z \neq 1$. Với điều kiện này thì

$\frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = -4 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -4(z-1)^2 \Leftrightarrow z^2+2z+1 = -4z^2+8z-4$

$\Leftrightarrow 5z^2-6z+5=0$ có $\Delta = -64 = 64i^2$

$\Rightarrow\ z_1 = \dfrac{6+\sqrt{64i^2}}{10} = \dfrac{6+8i}{10} = \dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\ ;\ z_2 = \dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i;\ \frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}$$

Câu 7: Cho z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của pt $z^2+(3-2i)z+6+5i=0$. Tính $|z_1-z_2|$.

Giải:

$z^2+(3-2i)z+6+5i=0$ có $\Delta = (3-2i)^2-4(6+5i) = -19-32i$

Sử dụng định lí Viet và tính chất $|z^n| = |z|^n$.

Theo Viet: $\begin{cases} z_1+z_2 = -3+2i \\ z_1z_2 = 6+5i \end{cases}$

Đặt $A = |z_1-z_2| \Rightarrow A^2 = |z_1-z_2|^2 = |(z_1-z_2)^2| = |(z_1+z_2)^2-4z_1z_2|$

$\Rightarrow A^2 = |(-3+2i)^2-4(6+5i)| = |-19-32i| = \sqrt{1385} \Rightarrow A = \sqrt[4]{1385}$

Câu 8: Giải phương trình phức sau: $1+(z+2i)+(z+2i)^2+(z+2i)^3+(z+2i)^4=0$

Giải:

Đặt $t = z+2i$, phương trình ban đầu trở thành $1+t+t^2+t^3+t^4=0\ (*)$

Dễ thấy $t=1$ không là nghiệm của $(*)$

$1 + t + t^2 + t^3 + t^4$ là tổng cấp số nhân có số hạng thứ nhất là 1, công bội là t

$$(*) \Leftrightarrow 1.\frac{1 - t^5}{1 - t} = 0 \Leftrightarrow t^5 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 \Leftrightarrow t = \cos\frac{k2\pi}{5} + i \sin\frac{k2\pi}{5}\ (k = \overline{0,4})$$

Do $t \neq 1 \Rightarrow$ Loại $k = 0$

$\Rightarrow t = \cos\frac{k2\pi}{5} + i \sin\frac{k2\pi}{5}\ (k = \overline{1,4})$

$\Rightarrow z + 2i = \cos\frac{k2\pi}{5} + i \sin\frac{k2\pi}{5} \Leftrightarrow z = \cos\frac{k2\pi}{5} + i\left(\sin\frac{k2\pi}{5} - 2\right), (k = \overline{1,4})$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{\cos\frac{k2\pi}{5} + i\left(\sin\frac{k2\pi}{5} - 2\right) \middle| k = \overline{1,4}\right\}$$

Câu 9: Cho $f(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0\ với\ z \in C$

b) Tính giá trị của $f(z)$ tại $z = \pm i$ b) Giải phương trình $f(z) = 0$ trên tập phức.

Giải:

a) $f(i) = f(-i) = 0$

b) $z = \pm i$ là nghiệm của $f(z) = 0$

$\Rightarrow$ khi phân tích $f(z)$ thành nhân tử sẽ có chứa $(z - i)(z + i)$

$\Rightarrow f(z) = (z - i)(z + i).p(z) = (z^2 + 1).p(z)$

$\Rightarrow p(z) = \frac{z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0}{z^2 + 1} = z^2 + z + 2 \Rightarrow f(z) = (z - i)(z + i)(z^2 + z + 2)$

Ta có $z^4 + z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z + i)(z^2 + z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} z = \pm i \\ z^2 + z + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$z^2 + z + 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + \frac{1}{4} = \frac{-7}{4} \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2} i\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i \\ z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là

$$S = \left\{\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i\ ;\ \pm i\right\}$$

Câu 10: Cho $f(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$

b) Tính $f(i)$. b) Giải phương trình $f(z) = 0$ trên tập số phức.

Giải:

a) $f(i) = i^3 - (2+i)i^2 + (2+2i)i - 2i = 0$

b) $f(i) = 0 \Rightarrow z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i = 0\ (*)$ có một nghiệm $z = i$

Ta có:

$z^3 - (2+i)z^2 + (2+2i)z - 2i = z^3 - 2z^2 - iz^2 + 2z + 2iz - 2i$

$= (z^3 - iz^2) + (-2z^2 + 2iz) + (2z - 2i) = z^2(z-i) - 2z(z-i) + 2(z-i)$

$= (z-i)(z^2 - 2z + 2)$

$(*) \Leftrightarrow (z-i)(z^2-2z+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - i = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = i \\ z = 1 \pm i \end{array}\right.$

Câu 12: Giải phương trình phức sau: $z^{10} + z^5 + 1 = 0$

Giải:

$z^{10} + z^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{10} + z^5 + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} \Leftrightarrow \left(z^5 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^5 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ z^5 = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{-2\pi}{3} + i\sin\dfrac{-2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \cos\dfrac{\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{5} \\ z = \cos\dfrac{\frac{-2\pi}{3} + k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{\frac{-2\pi}{3} + k2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{\cos\frac{\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{5} + i\sin\frac{\pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi}{5} \,\middle|\, k = \overline{0;4}\right\}$$

Câu 13: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình sau: $z^4 - (\sqrt{3}+1)z^3 + (\sqrt{3}+2)z^2 - (\sqrt{3}+1)z + 1 = 0$ Tính $\lvert z_4\rvert^4 + \lvert z_3\rvert^3 + \lvert z_2\rvert^2 + \lvert z_1\rvert$

Giải:

Đây có dạng phương trình đối xứng

Nhận xét: $z = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Với $z \neq 0$, chia cả hai vế phương trình cho z^2, ta được:

$$z^2 - (\sqrt{3}+1)z + (\sqrt{3}+2) - (\sqrt{3}+1)\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - (\sqrt{3}+1)\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{3} + 2 = 0\ (*)$$

Đặt $z + \frac{1}{z} = u \Rightarrow u^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2 \Rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = u^2 - 2$. Thay vào (*) ta được

$u^2 - (\sqrt{3}+1)u + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = \sqrt{3} \end{array}\right.$

$u = 1 \Rightarrow \; z + \dfrac{1}{z} = 1 \Rightarrow \dfrac{z^2+1}{z} = 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$u = \sqrt{3} \Rightarrow \; z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{3} \Rightarrow z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \pm \dfrac{1}{2}i$

Vậy tập nghiệm của phương trình

$$S = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\right\}$$

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$

$\Rightarrow |z_4|^4 + |z_3|^3 + |z_2|^2 + |z_1| = 4$

Câu 14: Giải phương trình phức sau: $(z+i)^5 = (z-i)^5$

Giải:

Nhận xét $z = i$ không là nghiệm của phương trình.

Với $z \neq i$, chia 2 vế phương trình cho $(z-i)^7$ ta được:

$$\frac{(z+i)^5}{(z-i)^5} = 1 \Leftrightarrow u^5 = \cos 0 + i \sin 0$$

Đặt $u = \frac{z+i}{z-1}$ với điều kiện $u \neq 1$ do $\frac{z+i}{z-1} \neq 1$

$\Leftrightarrow u = \cos\dfrac{k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{k2\pi}{5}\ \left(k = \overline{1,4}\right)$

Do $u \neq 1 \Rightarrow$ Loại $k = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z-i} = \cos\dfrac{k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{k2\pi}{5}\ (k = \overline{1,4})$

$\Leftrightarrow z + i = (z-i)\left(\cos\dfrac{k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{k2\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos\dfrac{k2\pi}{5} + i\sin\dfrac{k2\pi}{5} - 1\right)z = -\sin\dfrac{k2\pi}{5} + i\left(1 + \cos\dfrac{k2\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-\sin\frac{k2\pi}{5} + i\left(1+\cos\frac{k2\pi}{5}\right)}{\left(\cos\frac{k2\pi}{5} - 1\right) + i\sin\frac{k2\pi}{5}}\ (k = \overline{1,4})$

Vậy phương có tập nghiệm

$$S = \left\{\frac{-\sin\frac{k2\pi}{5} + i\left(1+\cos\frac{k2\pi}{5}\right)}{\left(\cos\frac{k2\pi}{5} - 1\right) + i\sin\frac{k2\pi}{5}}\ \middle|\ k = \overline{1,4}\right\}$$

Câu 15: Giải phương trình phức: $\bar{z}^2 + 2iz - 1 = 0$

Giải:

Đặt $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$. Thay vào phương trình ta được:

$(a-bi)^2+2i(a+bi)-1=0$
$\Leftrightarrow a^2-b^2-2abi+2ai-2b-1=0$
$\Leftrightarrow (a^2-b^2-2b-1)+(-2ab+2a)i=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2-2b-1=0 \\ -2ab+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2-2b-1=0 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\pm 2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy phương có tập nghiệm $S=\{-i;2+i;2-i\}$.

Câu 16: Giải phương trình phức $4z^4-24z^3+57z^2+18z-45=0$
Biết $z=3+i\sqrt{6}$ là 1 nghiệm của phương trình trên.

Giải:

Với phương trình phức hệ số thực, nếu $z=a+bi$ là nghiệm thì $z'=a-bi$ cũng là nghiệm.

Phương trình ban đầu có nghiệm $z=3+i\sqrt{6}\ \Rightarrow \bar{z}=3-i\sqrt{6}$ cũng là nghiệm.

$\Rightarrow$ Khi phân tích vế trái thành tích các đa thức thì sẽ có chứa $(z-3-i\sqrt{6})\ (z-3+i\sqrt{6})$. Nhân phá ra ta được $z^2-6z+15$. Bây giờ chỉ cần lấy $(4z^4-24z^3+57z^2+18z-45)$ chia cho $(z^2-6z+15)$ ta sẽ được đa thức còn lại là $4z^2-3$

$$4z^4-24z^3+57z^2+18z-45=0 \Leftrightarrow (z^2-6z+15)(4z^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3\pm i\sqrt{6} \\ z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S=\left\{3\pm i\sqrt{6};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Câu 17: Giải phương trình phức: $z^{10}+z^8+z^2+1=0$

Giải:

$$z^{10}+z^8+z^2+1=0 \Leftrightarrow z^8(z^2+1)+(z^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)(z^8+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2=-1=i^2 \\ z^8=-1=\cos\pi+i\sin\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\pm i \\ z=\cos\dfrac{\pi+k2\pi}{8}+i\sin\dfrac{\pi+k2\pi}{8} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S=\left\{\pm i;\cos\frac{\pi+k2\pi}{8}+i\sin\frac{\pi+k2\pi}{8}\middle|k=\overline{0;7}\right\}$$

Câu 18: Giải phương trình phức: $\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^4 = 1$ với $x \in R$, i là đơn vị ảo.

Giải:

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^4 = \cos 0 + \sin 0 \Rightarrow \frac{x+i}{x-i} = \cos\frac{k2\pi}{4} + i\sin\frac{k2\pi}{4}, k = 0,1,2,3$$

Với $k = 0 \Rightarrow \frac{x+i}{x-i} = 1 \Rightarrow x$ không là số thực.

Với $k = 1 \Rightarrow \frac{x+i}{x-i} = i \Rightarrow x = 1$

Với $k = 2 \Rightarrow x = 0$

Với $k = 3 \Rightarrow x = -1$

Câu 19: Tính $|{z_1}^2 - {z_2}^2|$ với z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của $iz^2 - (3-i)z + 2 = 0$

Giải:

Đặt $A = |{z_1}^2 - {z_2}^2| \Rightarrow A^2 = |{z_1}^2 - {z_2}^2|^2 = |({z_1}^2 - {z_2}^2)^2|$

$\Rightarrow A^2 = |({z_1}^2 + {z_2}^2)^2 - 4(z_1z_2)^2| = |[(z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2]^2 - 4(z_1z_2)^2|$ $(*)$

Theo Viet: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{3-i}{i} = -1 - 3i \\ z_1z_2 = \dfrac{2}{i} = -2i \end{cases}$

Thay vào (*) ta được

$A^2 = |[(-1-3i)^2 - 2(-2i)]^2 - 4(-2i)^2| = |-20 - 160i| = 20\sqrt{65} \Rightarrow A = \sqrt{20\sqrt{65}}$

Câu 20: Cho z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của $iz^2 + (2+i)z - 7 = 0$. Tính $\left|\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right|$

Giải:

$$A = \left|\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1}\right| = \left|\frac{(z_1)^2 - (z_2)^2}{z_1z_2}\right| = \left|\frac{(z_1-z_2)(z_1+z_2)}{z_1z_2}\right|$$

Theo Viet ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-2-i}{i} = -1 + 2i \\ z_1z_2 = \frac{-7}{i} = 7i \end{cases}$

$$\Rightarrow A = \left|\frac{(z_1-z_2).(-1+2i)}{7i}\right| = \left|\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{7}i\right).(z_1-z_2)\right| = \frac{\sqrt{5}}{7}|z_1 - z_2|$$

Đặt $B = |z_1 - z_2|$

$\Rightarrow B^2 = |z_1 - z_2|^2 = |(z_1-z_2)^2| = |(z_1+z_2)^2 - 4z_1z_2| = |-3 - 32i| = \sqrt{1033}$

$\Rightarrow B = \sqrt[4]{1033} \Rightarrow A = \dfrac{\sqrt{5}}{7}.\sqrt[4]{1033}$

Câu 21: Xác định phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn:

$$(1+i)^{22}(2z-1) = \left(\sqrt{3}-i\right)^{10}$$

Giải:

$$(1+i)^{22}(2z-1) = \left(\sqrt{3}-i\right)^{10} \Leftrightarrow 2z-1 = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}}{(1+i)^{22}} = \frac{\left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)\right]^{10}}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{22}}$$

$$\Leftrightarrow 2z-1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{-43\pi}{6} + i\sin\frac{-43\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4} \Leftrightarrow z = \frac{4-\sqrt{3}}{6} + \frac{5i}{8}$$

$$\Rightarrow Re(z) = \frac{4-\sqrt{3}}{6}, Im(z) = \frac{5}{8}$$

Câu 22: Tìm phần thực và phần ảo của số phức

$$z = \frac{(2-i\sqrt{12})^{50}}{(2+2i)^{30}}$$

Giải:

$$z = \frac{(2-i\sqrt{12})^{50}}{(2+2i)^{30}} = \frac{\left[4\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)\right]^{50}}{\left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{30}} = \frac{2^{100}\left(\cos\frac{-50\pi}{3} + i\sin\frac{-50\pi}{3}\right)}{2^{45}\left(\cos\frac{15\pi}{2} + i\sin\frac{15\pi}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow z = 2^{55}\left(\cos\frac{-145\pi}{6} + i\sin\frac{-145\pi}{6}\right) = 2^{55}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2^{54}(\sqrt{3}-i)$$

$$\Rightarrow Re(z) = 2^{54}\sqrt{3}, Im(z) = -2^{54}$$

Câu 23: Tìm phần ảo và phần thực của số phức $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{97}$

Giải:

$$z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^{97} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{97} = 2^{97}\left(\cos\frac{2\pi.97}{3} + \sin\frac{2\pi.97}{3}\right)$$

$$\Rightarrow Re(z) = 2^{97}.\cos\frac{2\pi.97}{3} = -2^{96}\,; Im(z) = 2^{97}.\sin\frac{2\pi.97}{3} = 2^{96}\sqrt{3}$$

Câu 24: Cho $z_n = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ với $n \in N$. Tìm n nhỏ nhất để: $Re(z) = 0$

Giải:

$$z_n = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^n = \frac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n} = \frac{\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}}{\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}} = \cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$\Rightarrow Re(z_n) = \cos\frac{n\pi}{6} = 0 \Rightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow n_{min} = 3$$

Câu 25: Tính modun và argument của số phức

$$z = \left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1+i\sqrt{3}}\right)^3$$

<u>Giải:</u>

$$z = \left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{1+i\sqrt{3}}\right)^3 = \left[\frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)}\right]^3 = 2\sqrt{2}(\cos\pi+\sin\pi)$$

$$\Rightarrow |z| = 2\sqrt{2}\,, \mathrm{Arg}(z) = \pi$$

Câu 26: Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z = (-1+i)^{10}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15}$

<u>Giải:</u>

$$z = (-1+i)^{10}\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15} = 2^{\frac{10}{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^{10}.2^{15}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{15}$$

$$\Rightarrow z = 2^{20}\left(\cos\frac{15\pi}{2}+i\sin\frac{15\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{25\pi}{2}+i\sin\frac{25\pi}{2}\right) = 2^{20}(\cos 20\pi+i\sin 20\pi) = 2^{20}$$

$$\Rightarrow Re(z) = 2^{20}, Im(z) = 0$$

Câu 27: Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $z = \dfrac{(1+i)^6(-1+i\sqrt{3})^n}{(1-i)^{10}}$ là một số thực.

<u>Giải:</u>

$$z = \frac{(1+i)^6(-1+\sqrt{3}i)^n}{(1-i)^{10}} = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6\left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^n}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{10}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2^{3+n}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^5\left(\cos\frac{-5\pi}{2}+i\sin\frac{-5\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2^{n-2}\left[\cos\left(\frac{3}{2}+\frac{2n}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{3}{2}+\frac{2n}{3}\right)\pi\right]}{\cos\frac{-5\pi}{2}+i\sin\frac{-5\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = 2^{n-2}\left[\cos\left(4+\frac{2n}{3}\right)\pi+i\sin\left(4+\frac{2n}{3}\right)\pi\right] = 2^{n-2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Để z là số thực

$$Im(z) = 2^{n-2} \sin\frac{2n\pi}{3} = 0 \Rightarrow n_{min} = 3$$

Câu 28: Cho số phức $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Tính $A = z^{1998} + \bar{z}^{1998}$, $\bar{z}$ là số phức liên hợp

Giải:

$z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z^{1998} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{1998} = \cos(1332\pi) + i\sin(1332\pi) = 1$

$\bar{z} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \bar{z}^{1998} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{1998} = \cos(1332\pi) - i\sin(1332\pi) = 1$

$\Rightarrow A = 2$

Câu 29: Chứng minh rằng:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = -1;\ \sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0\ , \qquad n \geq 2$$

Giải:

Xét số phức A có dạng:

$A = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$

$\Rightarrow A = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$

Mà $1 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^0$

$\Rightarrow A = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k$. Đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$\Rightarrow A = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$ (tổng cấp số nhân)

$\Rightarrow A = \frac{1 - \left(\cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n}\right)}{1-\varepsilon} = \frac{1-(1+0i)}{1-\varepsilon} = 0$

$$\begin{cases} Re(A) = 0 \\ Im(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{2k\pi}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 30: Cho $a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$; $k, n \in N$.
Tính $S = {a_0}^m + {a_1}^m + \cdots + {a_{n-1}}^m, m \in R$

Giải:

Để ý một chút, ta có $a_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ chính là căn bậc n của 1 $\Rightarrow {a_k}^n = 1$

$$a_2 = \cos\frac{2.2\pi}{n} + i\sin\frac{2.2\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = {a_1}^2$$

$$a_3 = \cos\frac{2.3\pi}{n} + i\sin\frac{2.3\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3 = {a_1}^3$$

$\Rightarrow$ Tổng quát lên ta có $a_k = {a_1}^k$

$$\Rightarrow S = 1 + {a_1}^m + {a_1}^{2m} + {a_1}^{3m} + \cdots + {a_1}^{(n-1).m} = \frac{1 - ({a_1}^m)^n}{1 - {a_1}^m}$$

(Tổng cấp số nhân có số hạng đầu bằng 1, công bội bằng ${a_1}^m$)

$$\Rightarrow S = \frac{1 - ({a_1}^n)^m}{1 - {a_1}^m} = \frac{1 - 1^m}{1 - {a_1}^m} = 0$$

Câu 31: Chứng minh rằng $S = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = \frac{-1}{2}$

Giải:

Xét số phức:

$$A = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} + i\left(\sin\frac{2\pi}{2n+1} + \sin\frac{4\pi}{2n+1} + \cdots + \sin\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

$$A = \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{2n+1} + i\sin\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2n\pi}{2n+1}\right)$$

Tổng S cần tìm chính là $Re(A)$

Dễ thấy khi đặt $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}$, ta có:

$$A = \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^n = \varepsilon.\frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon} \text{ (tổng cấp số nhân).}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right) - \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\cos\frac{2\pi}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}-\cos\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}-i\sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}-\cos\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\right)+i\left(\sin\frac{2\pi}{2n+1}-\sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\right)}{1-\left(\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)}$$

Mà $\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}=\frac{\pi}{2n+1}+\pi\Rightarrow\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{2n+1}=-\cos\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\\ \sin\frac{2\pi}{2n+1}=-\sin\frac{2(n+1)\pi}{2n+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow A=\frac{2\cos\frac{2\pi}{2n+1}+i.2\sin\frac{2\pi}{2n+1}}{\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)+i\left(-\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)}$$

Áp dụng công thức phép chia hai số phức

$$\boxed{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}}$$

$$\Rightarrow Re(A)=\frac{2\cos\frac{2\pi}{2n+1}.\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)+2\sin\frac{2\pi}{2n+1}.\left(-\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)}{\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2+\left(-\sin\frac{2\pi}{2n+1}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow Re(A)=\frac{\cos\frac{2\pi}{2n+1}-1}{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{2n+1}\right)}=\frac{-1}{2}=S$$

Câu 32: Cho $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_{2014}$ là các căn bậc 2014 phân biệt phức của 1. Tính $A=\sum_{i=1}^{2014}\varepsilon_i^3$

<u>Giải:</u>

$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2014}+i\sin\frac{2k\pi}{2014}$; $k=\overline{0,2013}$

$$A=\sum_{i=1}^{2014}{\varepsilon_i}^3=\sum_{k=0}^{2013}{\varepsilon_k}^3=0$$

Chứng minh tương tự Câu 30.

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- Bài giảng Đại số tuyến tính thầy Bùi Xuân Diệu.
- "Toán cao cấp: Đại số tuyến tính" - Tống Đình Quỳ,Nguyễn Cảnh Lương.
- "Bài tập Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.
- "Toán cao cấp" tập một - GS.TS Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), PGS.TS Trần Việt Dũng, PGS.TS Nguyễn Xuân Thảo, PGS.TS Trần Xuân Hiển.
- Bộ đề thi môn Đại số tuyến tính các năm Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.
- Đề cương môn Đại số tuyến tính Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội.

Tài liệu được biên soạn dựa trên kinh nghiệm cá nhân, dù đã rất cố gắng nhưng chắc chắn vẫn sẽ tồn tại các lỗi sai tính toán, lỗi đánh máy, …mọi ý kiến góp ý bạn đọc vui lòng gửi qua link fb "fb.com/tungg810" để mình có thể kiểm tra, hoàn thiện bộ tài liệu. Xin chân thành cảm ơn!